

Skema Numerik Persamaan Leslie Gower

Trija Fayeldi*

Universitas PGRI Kanjuruhan Malang

trija_fayeldi@unikama.ac.id

* Corresponding Author

Received: 3 Oktober 2024; Accepted: 10 November 2024, Published: 28 Desember 2024

Abstrak. Model predator-prey merupakan salah satu model yang sangat banyak diteliti dan dimodifikasi. Pada penelitian ini, akan dibangun suatu skema numerik untuk menyelesaikan suatu model predator-prey. Model yang dipilih pada penelitian ini adalah model kontinu Leslie-Gower yang telah dimodifikasi pada pemanenan. Model kontinu tersebut akan didiskritisasi dengan menggunakan metode Euler. Selanjutnya, akan diamati perilaku model hasil diskritisasi tersebut dan pada akhirnya akan diamati apakah perubahan parameter dapat mempengaruhi kestabilan model dengan menggunakan perangkat lunak Matlab. Hasil penelitian menunjukkan bahwa perilaku model hasil diskritisasi konsisten dengan model kontinunya. Pada simulasi numerik dengan Matlab, ditunjukkan bahwa perubahan parameter akan mempengaruhi kestabilan model.

Kata Kunci: predator-prey, Leslie-Gower, stabil, saddle, source, pemanenan

Copyright © 2024 Jurnal Terapan Sains dan Teknologi

How to cite: Trija Fayeldi. (2024). Skema Numerik Persamaan Leslie Gower. *Jurnal Terapan Sains dan Teknologi*, 6 (4), 286-290. <https://doi.org/10.21067/jtst.v6i4.11492>

Pendahuluan

Leslie-Gower memperkenalkan model dengan populasi predator tumbuh mengikuti model logistik (Leslie, 2020). Pada model ini, diasumsikan bahwa carrying capacity (kapasitas pendukung) predator sebanding dengan banyaknya populasi prey. Model ini kemudian diteliti dan dikembangkan oleh beberapa peneliti. Aguirre mengembangkan penelitian model predator-prey Leslie-Gower dengan penambahan efek (Aguirre dan Saez, 2021). Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa model Leslie-Gower dengan penambahan efek Allee dapat memiliki dua limit cycle. Aziz mengkaji model Leslie-Gower dengan mengasumsikan fungsi respon yang menyatakan besarnya pemangsaan predator terhadap prey mengikuti fungsi respon Holling tipe II (Alouzi dan Okiye, 2021). Mereka meneliti kestabilan global dan keterbatasan sistem tersebut. Model yang dikembangkan oleh Aziz, dkk. kemudian dimodifikasi dengan penambahan waktu tunda. Chen memperkenalkan perlindungan terhadap prey dan menunjukkan bahwa perlindungan tidak mempengaruhi perilaku model secara signifikan. Selain itu, pengaruh efek impulsif pada model diteliti oleh Song. Zhu melakukan penelitian model Leslie-Gower dengan fungsi respon Holling tipe II tanpa adanya kontrol impulsif dan mengkaji eksistensi dan kestabilan global solusi periodik positif model dengan mengkonstruksi suatu fungsi Lyapunov.

Metode Penelitian

Metodologi penelitian yang dilakukan pada penelitian ini adalah studi literatur. Pada penelitian ini, persamaan model Leslie-Gower kontinu (6a) dan (6b) didiskritisasi dengan menggunakan metode Euler. Kemudian, dilakukan pencarian titik kesetimbangan dan analisis kestabilan pada titik kesetimbangan tersebut secara lokal. Akhirnya, dilakukan simulasi numerik untuk beberapa kasus parameter model.

Hasil dan Pembahasan

Makalah dapat ditulis baik dalam bahasa Indonesia maupun Inggris. Tulisan dalam Pandang kembali (6a) dan (6b). Dengan menggunakan beda maju, persamaan (6a) dan (6b) dapat didiskritisasi menjadi seperti berikut.

$$H_{n+1} = H_n + (k_1 - a_1 P_n - b_1 H_n) H_n$$

oleh predator memangsa prey. Selain itu, carrying capacity predator sebanding dengan banyaknya

$$P_{n+1} = P_n + (k_2 - a P_n) P_n H_n$$

populasi prey, sehingga model Leslie-Gower dinyatakan sebagai sistem persamaan diferensial nonlinear berikut.

$$dx = (r_1 - a_1 y - b_1 x) x$$

$$dy = (r - a y) y \quad (5b)$$

Dengan $k_1 = (r_1 - c_1)$ dan $k_2 = (r_2 - c_2)$.

2. Titik Kesetimbangan Model

Misalkan titik kesetimbangan adalah (H^*, P^*) maka haruslah berlaku

$$H^* = H^* + (k_1 - a P^* - b H^*) H^*$$

dengan semua parameter bernilai positif. Kedua parameter, yaitu r_1 dan r_2 berturut-turut

$$P^* = P^* + (k_2 - a P^*) P^* H^*$$

Untuk E1 diperoleh:

$$(k_2 - a P^*) = 0.$$

$$J_{E1} = (1 - k_1 - a_1 k_1 b_1).$$

Jelas $H^* \neq 0$. Substitusikan $P^* = 0$

$$k_1 - a_1 (0) - b_1 H^* = 0$$

$$k_1 - b_1 H^* = 0$$

$$k_1 = b_1 H^* \Rightarrow H^* = \frac{k_1}{b_1}$$

Sehingga diperoleh $E1 = (\frac{k_1}{b_1}, 0)$.

Untuk $k_1 - a_1 P^* - b_1 H^* = 0$ diperoleh

Nilai-nilai eigen dari J_{E1} adalah $\lambda_1 = 1 - k_1$ dan λ_2

$= 1 + k_2$. Jelas $|\lambda_2| = |1 + k_2| = 1 + k_2 > 1$.

Lemma

Jika $0 < k_1 < 2$ maka $|\lambda_1| < 1$.

Bukti:

$$0 < k_1 < 2$$

$$P^* = k_1 - b_1 H$$

Substitusikan, diperoleh

$$-2 < -k_1 < 0$$

$$-2 + 1 < -k_1 + 1 < 0 + 1$$

$$-1 < 1 - k_1 < 1$$

$$(k_2 - a_2 P^*) = 0$$

$$H^* - a_2(k_1 - b_1 H^*) = 0$$

$$|1 - k_1| < 1 \text{ (terbukti)}$$

$$a_1 k_2 H^* - a_2(k_1 - b_1 H^*) = 0$$

$$a_1 H^* a_1 k_2 H^* - a_2 k_1 + a_2 b_1 H^* = 0$$

$$H^* (a_1 k_2 + a_2 b_1) = a_2 k_1$$

$$a_1 k_2 + a_2 b_1$$

Substitusikan diperoleh

$$P^* = k_1 - b_1 H a_1 a_1 k_2 - b_1$$

$$P^* = \frac{a_1 k_2 + a_2 b_1}{a_1}$$

Berdasarkan lemma tersebut, dapat dituliskan teorema berikut.

Teorema 2

Jika $k_1, k_2 > 0$ maka

1. E_1 saddle jika $k_1 < 2$
2. E_1 source jika $k_1 > 2$
3. E_1 nonhiperbolik jika $k_1 = 2$

$$a_1 P^* = k_1(a_1 k_2 + a_2 b_1) - a_2 b_1 k_1$$

Adapun matriks Jacobi untuk E_2 adalah

$$1 - b_1 H^* - a_2 H^* a_1(a_1 k_2 + a_2 b_1)$$

$$P^* = k_1(a_1 k_2 + a_2 b_1 - a_2 b_1) a_1(a_1 k_2 + a_2 b_1)$$

3. Analisis Kestabilan Model

Analisis kestabilan model dilakukan dengan mengamati perilaku model secara lokal di sekitar titik kesetimbangannya. Misalkan,

$$F(H, P) = H + (k_1 - a_1P - b_1H) H \quad q = 1 - (b_1H^* + k_2) + k_1k_2$$

Lemma 2

Jika $k_1, k_2 > 0$ maka $1 - p + q > 0$

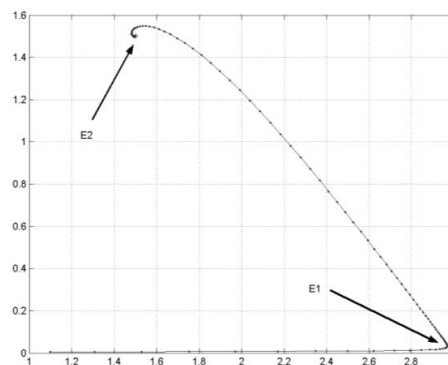
Bukti:

Misalkan $k_1, k_2 > 0$.

$$\begin{aligned} 1 - p + q &= 1 - [2 - (b_1H^* + k_2)] + 1 - (k_2 + b_1H^*) + k_1k_2 \\ &= b_1H^* + k_2 - (b_1H^* + k_2) + k_1k_2 \\ G(H, P) &= P + (k_2 - a_1P)PH \\ &= k_1k_2 > 0 \text{ (terbukti)} \end{aligned}$$

4. Simulasi Numerik

Berikut akan disajikan simulasi numerik dari sistem (7a) dan (7b) dengan $c_1 = 0,1$; $r_1 = 0,3$; $c_2 = 0,1$; $r_2 = 0,2$; $a_1 = 0,1$; $b_1 = 0,1$; $a_2 = 0,1$. Pada simulasi tersebut, diperoleh nilai eigen pada titik kesetimbangan $E_1 = (3, 0)$ adalah $|\lambda_1| = 0,7$ dan $|\lambda_2| = 1,1$ yang berarti titik kesetimbangan E_1 saddle. Adapun nilai eigen yang diperoleh pada titik kesetimbangan $E_2 = (1,5, 1,5)$ adalah $|\lambda_1| = 0,8832$ dan $|\lambda_2| = 0,8832$ yang berarti titik kesetimbangan E_2 stabil.



**Gambar 1 Plot sistem (7a) dan (7b) dengan
 $c_1 = 0,1$; $r_1 = 0,3$; $c_2 = 0,1$; $r_2 = 0,2$; $a_1 = 0,1$; $b_1 = 0,1$; $a_2 = 0,1$**

Penutup

Berdasarkan uraian pada hasil dan pembahasan, maka dapat diambil kesimpulan bahwa perilaku model hasil diskritisasi konsisten dengan model kontinunya. Selain itu, pada simulasi numerik dengan Matlab, ditunjukkan bahwa perubahan parameter akan mempengaruhi kestabilan model.

Daftar Pustaka

- Leslie, "Some Further Notes on The Use of Matrices in Population Mathematics," *Biometrika*, vol. 35, pp. 213-245, 1948.
- E. P. Aguirre and E. Saez, "Two Limit Cycles in a Leslie-Gower Predator-Prey Model with Additive Allee Effect," *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 10, no. 3, pp. 1401-1416, 2009.
- M. A. Aziz-Alaoui and M. D. Okiye, "Boundedness and Global Stability for a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-Type II," *Applied Math*, vol. 16, pp. 1069-1075, 2003.
- A. F. Nindjin, M. Aziz-Alaoui and M. Cadivel, "Analysis of a Predator-Prey Model with Modified Leslie-Gower and Holling-type II Schemes with Time Delay," *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 7, pp. 1104-1118, 2006.
- R. Yafia and F. E. Adnani, "Limit Cycle and Numerical Simulations for Small and Large Delays in a Predator-Prey with Modified Leslie-Gower and Holling-type II Schemes," *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, vol. 9, no. 5, pp. 2055-2067, 2008.